ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۱) دهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات، **نکات مشاوره‌ای** نوشتیم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

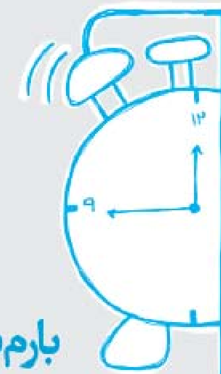
۲- آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳- پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

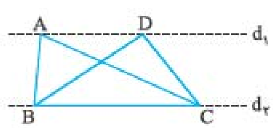
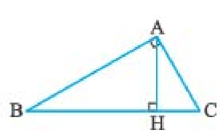
۴- درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۱) نیاز دارید، تنها در ۹ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

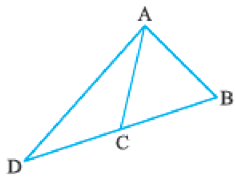
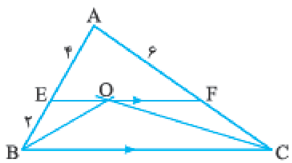
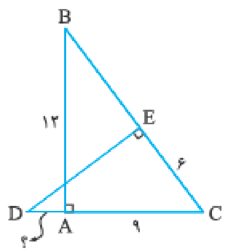
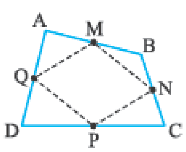
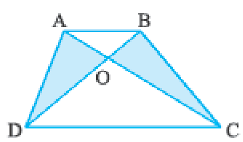
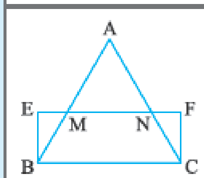
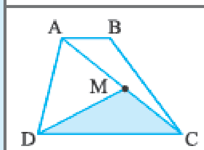
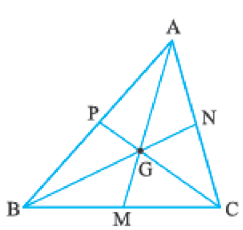


فهرست

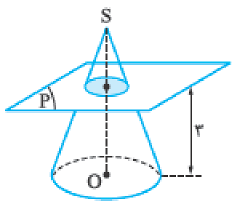
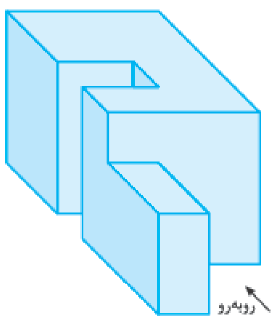
بارم‌بندی درس هندسه (۱)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول تا آخر فصل ۲	پایانی نوبت دوم
اول	۹ نمره	۳ نمره
دوم	۱۱ نمره	۴ نمره
سوم	—	۷ نمره
چهارم	—	۶ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱ — نوبت اول پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم		نمره
	فصل اول		
۱	زاویهٔ xOy داده شده است. نیمساز این زاویه را با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کنید.	مراحل رسم را با دقت بیان کنید.	۱/۵
۲	در جاهای خالی کلمات یا عبارت‌های مناسب قرار دهید تا گزاره‌ای درست حاصل شود. الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، .... به یک فاصله است. ب) اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن نقطه .... قرار دارد. پ) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، .... حاصل می‌شود. ت) ارزش درستی نقیض یک گزاره .... ارزش درستی خود گزاره است.	ویژگی‌های نیمساز و عمودمنصف را به خاطر داشته باشید.	۱/۵
۳	مستطیلی رسم کنید که طول یک ضلع آن ۸ و طول قطر آن ۱۰ باشد.	رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر و یک ضلع آن معلوم است.	۱/۵
۴	انواع استدلال را فقط نام ببرید.		۱
۵	قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث در یک نقطه همرس هستند.	ویژگی نقطه‌ای روی نیمساز را به خاطر بیاورید.	۱/۵
۶	اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\hat{C} > \hat{B}$، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: $AB > AC$.	در برهان خلف، حکم را باید نقض کنیم.	۱
۷	با ارائهٔ مثالی نقض، هر یک از حکم‌های زیر را رد کنید. الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه از دو برابر کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است. ب) اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، آن‌گاه B زیرمجموعهٔ A نیست.		۱
	فصل دوم		
۸	از تناسب‌های $\frac{y-۱}{۴} = \frac{۲}{۲x-۲} = \frac{۷}{۳x+۵}$ مقادیر x و y را پیدا کنید.	یکی از ویژگی‌های مهم تناسب، خاصیت طرفین وسطین است.	۱
۹	در شکل زیر، دو خط d_1 و d_1 موازی هستند. اگر مساحت مثلث BCD برابر $۲۰\,cm^2$ و $AC = ۸\,cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ B از AC چند سانتی‌متر است؟ 	باید ویژگی‌های مهم مساحت مثلث‌هایی با قاعده‌های برابر یا ارتفاع برابر را به خاطر داشته باشیم.	۱/۵
۱۰	قضیهٔ تالس را بیان و اثبات کنید.	نوشتن فرض و حکم یادت نره.	۲
۱۱	در یک روز آفتابی طول سایهٔ درختی ۱۲ متر و در همان لحظه طول سایهٔ حسن که ایستاده است ۲/۴ متر می‌باشد. اگر طول قد حسن ۱/۸ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟	در هر لحظه از روز پرتوهای خورشید با هم موازی هستند.	۱/۵
۱۲	قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب و زاویهٔ بین این ضلع‌ها برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث، متشابه‌اند.	یادمان باشد که روی یکی از مثلث‌ها، مثلثی همنهشت با دیگری رسم می‌کنیم.	۲
۱۳	در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس A قائمه است، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر $BH = ۱۶$ و $CH = ۹$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط‌های AH ، AB و AC را بیابید. 	ویژگی‌های ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه را به خاطر بیاورید.	۱/۵
۱۴	مثلثی به طول اضلاع ۶ ، ۸ و ۱۰ با مثلث دیگری که کوچک‌ترین ارتفاع آن برابر ۸ است، متشابه می‌باشد. محیط و مساحت مثلث دوم را بیابید.	نسبت محیط دو مثلث متشابه و نسبت مساحت دو مثلث متشابه را به خاطر بیاورید.	۱/۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

<table>
<tr><td>هندسه (۱)</td><td>رشته: ریاضی فیزیک</td><td>مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه</td><td>kheilisabz.com</td></tr>
<tr><td>ردیف</td><td>آزمون شمارهٔ ۹</td><td>نوبت دوم پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم</td><td>نمره</td></tr>
<tr><td>۱</td><td colspan="2">با استفاده از خط‌کش و پرگار یک زاویهٔ ۳۰° رسم نمایید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td colspan="2">در شکل مقابل نشان دهید:
الف) اگر $AB = DC$ ، آن‌گاه $AD > BC$ است.
ب) اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه $AD > AB$ است.

</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۳</td><td colspan="2">در شکل مقابل، نیمسازهای درونی B و C یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند و EF که از O می‌گذرد موازی ضلع BC رسم شده است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول ضلع BC را به دست آورید.

</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۴</td><td colspan="2">در شکل مقابل $AC = ۹$ ، $EC = ۶$ و $AB = ۱۲$ است. طول پاره‌خط AD را به دست آورید.

</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td colspan="2">اگر مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها یک چندضلعی محدب برابر ۶۶ باشد، تعداد اضلاع را پیدا کنید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۶</td><td colspan="2">ثابت کنید چهارضلعی حاصل از به هم وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی، یک متوازی‌الاضلاع است.

</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۷</td><td colspan="2">ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ای که قطرهای آن رسم شده است، مساحت مثلث‌های کوچک مجاور به دو ساق برابرند.
حکم : $S_{AOD} = S_{BOC}$

</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۸</td><td colspan="2">در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و چهارضلعی BEFC مستطیل است. اگر مساحت این مستطیل برابر $۱۲\sqrt{۳}$ و مساحت مثلث AMN برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد، مساحت مثلث ABC را بیابید.

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۹</td><td colspan="2">در ذوزنقهٔ ABCD شکل مقابل، $DC = ۳AB$ و نقطهٔ M وسط قطر AC است. مساحت مثلث DMC چه کسری از مساحت ذوزنقه است؟

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td colspan="2">ثابت کنید در هر مثلث، شش مثلثی که با رسم میانه‌های آن ایجاد می‌شوند، هم‌مساحت‌اند.

</td><td>۱</td></tr>
</table>

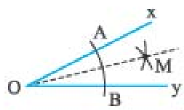
هندسه (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
۱۱	اندازهٔ مساحت یک شکل شبکه‌ای سه برابر تعداد نقاط درونی و $\frac{۲}{۳}$ برابر تعداد نقاط مرزی است. مساحت شکل را مشخص کنید.	۱
۱۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: الف) اگر خطی بر دو خط ناموازی از صفحه‌ای عمود باشد، آن خط بر صفحه عمود است. ب) خط d با صفحهٔ P موازی است. صفحهٔ Q از d می‌گذرد و P را در خط D قطع می‌کند. در این صورت $d \parallel D$ است. پ) اگر دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمود باشند، آن‌گاه فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q بر صفحهٔ R عمود است.	۱/۵
۱۳	در شکل مقابل، صفحهٔ P موازی قاعدهٔ مخروط قائم است و به فاصلهٔ ۳ از قاعدهٔ آن قرار دارد. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط ۸ و شعاع دایرهٔ مقطع ۲ باشد، ارتفاع مخروط را بیابید. 	۱/۵
۱۴	تصویر از روبه‌رو و بالای شکل مقابل را رسم کنید. 	۱/۵
۱۵	حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را حول یکی از اضلاع آن بیابید.	۱/۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ A و نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند. دو کمان مساوی به مراکز A و B و شعاع دلخواه ولی بیشتر از نصف AB، می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. نقطهٔ O را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم که همان نیمساز زاویه است.



۲- الف) از دو سر آن پاره‌خط   ب) روی نیمساز آن زاویه

پ) عکس قضیه   ت) مخالف

۳- خط d را رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم.

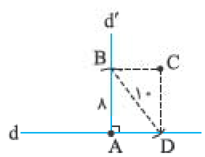
- از نقطهٔ A خطی را بر خط d عمود می‌کنیم (خط d').

- به مرکز A و شعاع ۸ کمانی می‌زنیم تا خط d' را در نقطهٔ B قطع کند.

- به مرکز B و شعاع ۱۰ کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطهٔ D قطع کند.

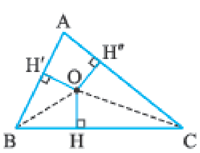
- از نقاط B و D خطوطی را به ترتیب موازی با خطوط d و d' رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را C می‌نامیم.

چهارضلعی ABCD همان مستطیل موردنظر است.



۴- استدلال استقرایی ـ استدلال استنتاجی

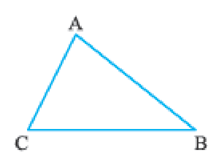
۵- نیمسازهای زوایای داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. از نقطهٔ O بر اضلاع مثلث عمودهایی رسم می‌کنیم. با توجه به ویژگی نقاط روی نیمساز داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{O روی نیمساز زاویهٔ داخلی B قرار دارد} \Rightarrow OH = OH' \\ \text{O روی نیمساز زاویهٔ داخلی C قرار دارد} \Rightarrow OH = OH'' \end{array}\right\} \Rightarrow OH' = OH''$$

پس نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ داخلی A هم قرار دارد. چرا که فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویهٔ A، برابر است و این ویژگی را تنها نقاط نیمساز A دارا هستند، پس هر سه نیمساز از نقطهٔ O می‌گذرند و همرس‌اند.

۶- فرض کنیم AB بزرگ‌تر از AC نباشد (فرض خلف) در این صورت دو حالت ممکن است رخ دهد:



$$\begin{cases} AB = AC \xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{\text{مثلث}} \hat{B} = \hat{C} \ \text{این تناقض است} \\ \text{یا} \\ AB < AC \xrightarrow{\text{بنابر قضیه}} \hat{C} < \hat{B} \ \text{این تناقض است} \end{cases}$$

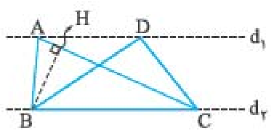
چون در هر دو حالت بالا با فرض قضیه به تناقض می‌رسیم، پس فرض خلف باطل است و $AB > AC$ می‌باشد.

۷- الف) در مثلث به زوایای °۳۰، °۷۰ و °۸۰ بزرگ‌ترین زاویه از دو برابر کوچک‌ترین زاویه، بزرگ‌تر است.

ب) در حالتی که دو مجموعهٔ A و B مساوی باشند، هم A زیرمجموعهٔ B است و هم B زیرمجموعهٔ A است.

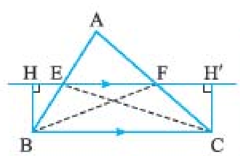
۸-
$$\frac{۷}{۳x+۵} = \frac{۲}{۲x-۲} \Rightarrow ۱۴x-۱۴ = ۶x+۱۰ \Rightarrow ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$
$$\frac{۲}{۲(۳)-۲} = \frac{y-۱}{۴} \Rightarrow ۸ = ۴y-۴ \Rightarrow y = ۳$$

۹- چون دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی‌اند، پس فاصلهٔ نقاط A و D تا خط $d_۲$ یکسان است؛ یعنی ارتفاع‌های وارد بر ضلع BC در دو مثلث ABC و BCD برابر است، و این دو مثلث هم‌مساحت‌اند.



$$S_{ABC} = S_{DBC} = ۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}BH \times ۸ = ۲۰ \Rightarrow BH = ۵$$

۱۰- اگر خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، پاره‌خط‌هایی متناسب ایجاد می‌کند.



فرض	$EF \parallel BC$
حکم	$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

$$EF \parallel BC \Rightarrow BH = CH' \Rightarrow \frac{۱}{۲}EF \times BH = \frac{۱}{۲}EF \times CH'$$
$$\Rightarrow S_{BEF} = S_{CEF} \qquad (۱)$$

عمودی که از F بر ضلع AB وارد می‌شود هم ارتفاع مثلث AEF است و هم ارتفاع مثلث BEF.

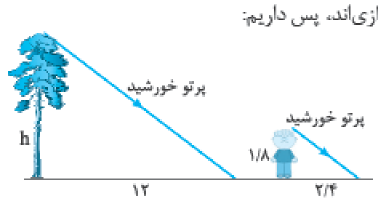
$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{BEF}} = \frac{AE}{BE} \qquad (۲)$$

عمودی که از E بر ضلع AC وارد می‌شود هم ارتفاع مثلث AEF است و هم ارتفاع مثلث CEF.

$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{CEF}} = \frac{AF}{FC} \qquad (۳)$$

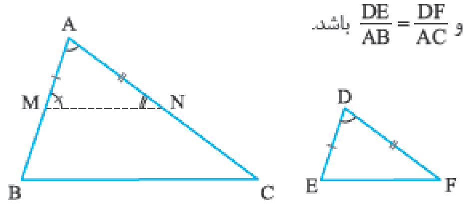
$$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC}$$

۱۱- چون پرتوهای خورشید با هم موازی‌اند، پس داریم:



$$\frac{h}{۱/۸} = \frac{۱۲}{۲/۴} \Rightarrow \frac{h}{۳} = \frac{۱۲}{۴}$$
$$\Rightarrow ۴h = ۳ \times ۱۲ \Rightarrow h = ۹$$

۱۲- فرض کنیم $\hat{A} = \hat{D}$ و $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ باشد.



روی اضلاع AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب مساوی DE و DF جدا می‌کنیم و سپس M را به N وصل می‌کنیم. مشخص است که مثلث AMN با مثلث DEF به حالت «ض ز ض» همنهشت است، پس:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{M} = \hat{B} \\ \hat{N} = \hat{C} \end{cases}$$

بنابراین تمام زاویه‌های دو مثلث ABC و AMN برابرند و در نتیجه متشابه‌اند و چون دو مثلث AMN و DEF همنهشت هستند، پس دو مثلث ABC و DEF نیز متشابه‌اند.

۱۳- روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را می‌نویسیم:

$$AH^{۲} = BH \times CH = ۱۶ \times ۹ \Rightarrow AH = ۱۲$$

$$AB^{۲} = BH \times BC = ۱۶ \times ۲۵ \Rightarrow AB = ۲۰$$

$$AC^{۲} = CH \times BC = ۹ \times ۲۵ \Rightarrow AC = ۱۵$$

۱۴- با توجه به این‌که $(۶)^{۲} + (۸)^{۲} = (۱۰)^{۲}$، مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه است و مثلث دوم نیز که با آن متشابه است نیز قائم‌الزاویه می‌باشد.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه کوچک‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر وتر است و نسبت این دو ارتفاع نظیر هم، همان نسبت تشابه دو مثلث است. اگر فرض کنیم h ارتفاع وارد بر وتر در مثلث اول باشد، با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$h \times ۱۰ = ۶ \times ۸ \Rightarrow h = ۴/۸$$

$$\text{(نسبت تشابه)}\ k = \frac{۸}{۴/۸} = \frac{۵}{۳}$$

$$\frac{\text{محیط مثلث دوم}}{\text{محیط مثلث اول}} = k \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث دوم}}{۱۰+۸+۶} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = ۴۰$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث دوم}}{\text{مساحت مثلث اول}} = k^{۲} \Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث دوم}}{\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸} = (\frac{۵}{۳})^{۲} \Rightarrow \text{مساحت مثلث دوم} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

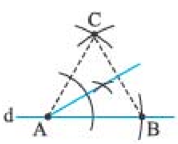
۱- خط d و نقطهٔ دلخواه A را روی آن مشخص می‌کنیم.

- دهانهٔ پرگار را به مقدار دلخواه باز کرده و به مرکز A کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطهٔ B قطع کند.

- دهانهٔ پرگار را تغییر نمی‌دهیم و دو کمان به مراکز A و B می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند.

- از A به C وصل می‌کنیم.

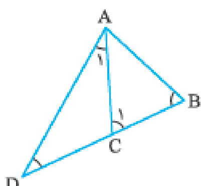
نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ را رسم می‌کنیم.



به این ترتیب چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، زاویهٔ A برابر ۶۰° است و با رسم نیمساز آن، دو زاویهٔ ۳۰° به وجود آمده است.

۲- الف) $\overset{\triangle}{ABD}: AD+AB>BD \Rightarrow AD+\cancel{AB}>BC+\cancel{DC} \Rightarrow AD>BC$

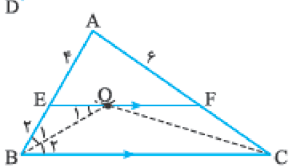
ب)



$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}_۱=\hat{A}_۱+\hat{D} \Rightarrow \hat{C}_۱>\hat{D}\\ \text{با فرض}: AB=AC \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}>\hat{D}$$

$$\Rightarrow AD>AB$$

۳-



$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۴}{۲}=\frac{۶}{FC} \Rightarrow FC=۳$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}EF \parallel BC\\ BO\ \text{مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{B}_۲\\ \hat{B}_۱=\hat{B}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{B}_۱ \Rightarrow EO=BE=۲\\ \text{به همین ترتیب ثابت می‌شود}: OF=FC=۳\end{array}\right\}\Rightarrow EF=۲+۳=۵$$

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{۵}{BC}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow BC=۷/۵$$

۴- $BC^۲=(۹)^۲+(۱۲)^۲=۲۲۵ \Rightarrow BC=۱۵$

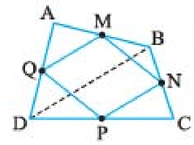
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{E}=۹۰^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{DEC} \Rightarrow \frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{۱۵}{۹+x}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳۰=۲۷+۳x \Rightarrow x=۱$$

۵- $n+\frac{n(n-۳)}{۲}=۶۶ \Rightarrow ۲n+n^۲-۳n=۱۳۲ \Rightarrow n^۲-n-۱۳۲=۰$

$\Rightarrow (n-۱۲)(n+۱۱)=۰ \Rightarrow n=۱۲$ یا $n=-۱۱$ (غ‌ق‌ق)

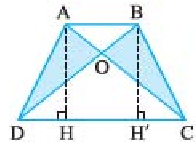
۶- قطر BD را رسم می‌کنیم. چون در مثلث‌های ABD و BCD، MQ و NP پاره‌خط‌های میانگین‌اند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MQ \parallel BD\ ,\ MQ=\frac{BD}{2} \\ NP \parallel BD\ ,\ NP=\frac{BD}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel NP\ ,\ MQ=NP$$

چون در چهارضلعی MNPQ دو ضلع موازی و مساوی‌اند، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۷- ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم.



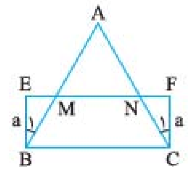
$$AB \parallel DC \Rightarrow AH = BH'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}DC.AH = \frac{1}{2}DC.BH' \Rightarrow S_{ADC}=S_{BDC}$$

$$\Rightarrow S_{ADC}-S_{DOC}=S_{BDC}-S_{DOC} \Rightarrow S_{AOD}=S_{BOC}$$

۸- اگر اضلاع BE و CF از مستطیل را برابر a درنظر بگیریم،

با توجه به این‌که زوایای B_1 و C_1 برابر 30° هستند، داریم:



$$EM = NF = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$S_{AMN}=\frac{\sqrt{3}}{4}(MN)^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2\sqrt{3}$$

$$S_{BEFC}=BE\times EF = a\times(\frac{a}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+\frac{a}{\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3}=a(\frac{2a}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}) \Rightarrow a^2+3a-18=0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-3)=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow BC=EF=\frac{3}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16\times 3 = 12\sqrt{3}$$

۹- دو مثلث ABC و ADC دارای ارتفاع برابر هستند که همان ارتفاع ذوزنقه است، پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{AB}{DC}=\frac{1}{3} \Rightarrow S_{ADC}=3S_{ABC}=\frac{3}{4}S_{ABCD}$$

$\overset{\Delta}{ADC}$: DM میانه است $\Rightarrow S_{DMC}=\frac{1}{2}S_{ADC}=\frac{1}{2}(\frac{3}{4}S_{ABCD})=\frac{3}{8}S_{ABCD}$

۱۰- فرض کنیم مساحت مثلث اصلی S باشد. اگر در دو مثلث ABM و ACM قاعده‌ها را BM و MC در نظر بگیریم، ارتفاع‌های نظیر این دو قاعده برابرند، پس $S_{ABM}=S_{AMC}=\frac{1}{2}S$ اگر در دو مثلث ABG و BGM قاعده‌ها را AG و MG در نظر بگیریم، ارتفاع‌های نظیر این دو قاعده نیز برابرند و چون $AG = 2MG$ در نتیجه $AM = 3MG$، پس:

$$S_{BMG}=\frac{1}{3}S_{ABM}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}S)=\frac{1}{6}S$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود هر شش مثلث، مساحتی برابر $\frac{1}{6}S$ دارند.

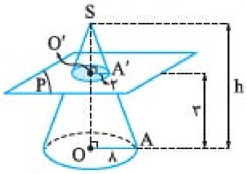
۱۱-

$$\begin{cases} S=3i \\ S=\frac{2}{3}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2}+i-1=3i \\ \frac{b}{2}+i-1=\frac{2}{3}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+2i-2=6i \\ 3b+6i-6=4b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-4i=2 \\ -b+6i=6 \end{cases} \Rightarrow i=4\ ,\ b=18 \Rightarrow S=\frac{18}{2}+4-1=12$$

۱۲- الف) درست ب) درست پ) درست

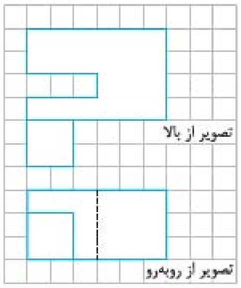
۱۳- دو مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA و $SO'A'$ متشابه‌اند (دو زاویهٔ برابر دارند)، پس داریم:



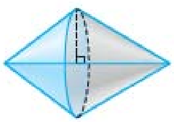
$$\frac{SO}{SO'}=\frac{OA}{O'A'} \Rightarrow \frac{h}{h-3}=\frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h-3}=4 \Rightarrow h=4$$

۱۴-



۱۵- حجم حاصل، دو مخروط است که قاعده‌های آن‌ها بر هم منطبق‌اند و شعاع قاعدهٔ آن‌ها همان ارتفاع مثلث است. پس:



$$\text{حجم حاصل} = 2(\frac{1}{3}\pi r^2 h) = 2[\frac{1}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2\times\frac{a}{2}]=\frac{\pi}{4}a^3$$

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

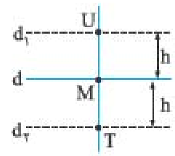
فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

چند نکته در ترسیمات هندسی

۱ چون اغلب از دایره برای ترسیم استفاده می‌شود لازم دیدیم بدون این که وارد مبحث مکان‌های هندسی شویم، تعریفی از آن را ارائه دهیم.

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت به فاصله‌ای ثابت باشند؛ آن نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و آن فاصلهٔ ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

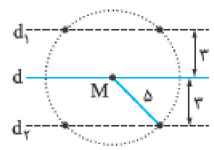
۲ مجموعه نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت مانند d به فاصلهٔ ثابت h باشند، روی دو خط موازی با d هستند. برای رسم این دو خط، از نقطهٔ دلخواه M روی خط d عمودی بر آن رسم می‌کنیم و در دو طرف نقطهٔ M پاره‌خط‌های MU و MT را به اندازهٔ h جدا می‌کنیم و از نقطه‌های U و T دو خط بر پاره‌خط UT عمود می‌کنیم تا خط‌های d_1 و d_2 به دست آیند؛ این دو خط با d موازی‌اند و هر نقطه از این دو خط، فاصله‌اش از d برابر h می‌باشد.



مثال: خط d و نقطهٔ M روی آن را در نظر بگیرید. نقطه‌ای پیدا کنید که از خط d به فاصلهٔ ۳ و از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۵ باشد.

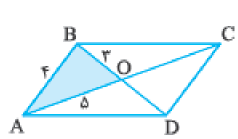
پاسخ: نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دو خط موازی با آن قرار دارند و در شکل، این دو خط با d_1 و d_2 نمایش داده شده‌اند.

نقاطی که از M به فاصلهٔ ۵ هستند روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۵ قرار دارند. نقاط برخورد دو خط d_1 و d_2 با این دایره، همان نقاط موردنظر می‌باشند. مشاهده می‌کنید که مسئله دارای چهار جواب است.



مثال: متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو قطر آن ۶ و ۱۰ سانتی‌متر و طول یکی از اضلاع آن ۴ سانتی‌متر باشد.

پاسخ: اگر فرض کنیم متوازی‌الاضلاع شکل زیر، جواب مسئله باشد، با توجه به آن‌که می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، آن‌گاه $AO = 5$ ، $BO = 3$ و $AB = 4$، پس طول سه ضلع مثلث ABO معلوم‌اند و در نتیجه قابل رسم است (رسم مثلثی را که سه ضلع آن معلوم است می‌دانیم و در این مسئله نیازی به بیان چگونگی رسم آن نیست). پس از رسم این مثلث، AO را از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید و BO را نیز از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D پدید آید. چهارضلعی $ABCD$ ، متوازی‌الاضلاع موردنظر می‌باشد.

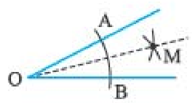


ویژگی نیمساز یک زاویه

نیمساز هر زاویه، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز یک زاویه

برای رسم نیمساز یک زاویه، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه باز می‌کنیم و به مرکز رأس زاویه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازه‌ای دلخواه ولی بیشتر از نصف AB باز می‌کنیم و دو کمان به مرکزهای A و B می‌زنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. OM نیمساز زاویه است.

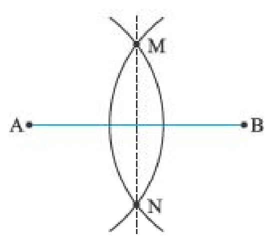


ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف هر پاره‌خط، مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله هستند و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

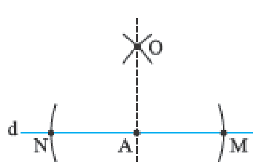
برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط مانند AB، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع کنند. امتداد MN عمودمنصف AB است.



رسم خطی عمود بر یک خط از نقطهٔ A روی آن

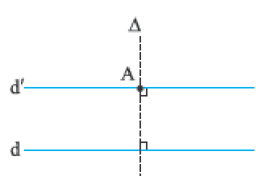
فرض کنیم A روی خط d باشد و بخواهیم از آن عمودی بر d رسم کنیم. برای این منظور به مرکز A و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا d را در M و N قطع کند، سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف پاره‌خط MN باز می‌کنیم و به مرکزهای M و N دو قوس می‌زنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. امتداد OA بر d عمود است.

اگر نقطهٔ A بیرون خط d باشد، روش کار به همین صورت است.



رسم خطی موازی با یک خط از نقطهٔ A بیرون آن

فرض کنیم A بیرون خط d باشد و بخواهیم از A خطی موازی با d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از A عمودی بر d رسم می‌کنیم (روش این عمل را در بالا توضیح دادیم.) و آن را Δ می‌نامیم، سپس از A عمودی بر Δ رسم می‌کنیم (مانند روش فوق) و آن را d' می‌نامیم. d' با d موازی است.



استدلال و انواع آن

استدلال بر دو نوع است:

۱- استدلال استقرایی: حدس درستی یک حکم کلی براساس صحت آن گزاره در چند حالت محدود را استدلال استقرایی نامند.

۲- **استدلال استنتاجی:** اثبات درستی یک حکم، براساس نتیجه‌گیری از تعاریف، اصول، قضایا و گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامند.

باید بدانیم که تنها استدلال استنتاجی، استدلالی قابل‌قبول است؛ در واقع عالی‌ترین نوع استدلال، استدلال استنتاجی است.

۳- **استدلال با مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد حکمی کلی نادرست است، مثال نقض می‌گویند.

نقاط همرسی اجزای فرعی مثلث

۱ در هر مثلث، سه نیمساز زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد.

۲ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث، در یک نقطه همرس هستند. این نقطه می‌تواند درون مثلث یا روی یکی از اضلاع و یا بیرون مثلث باشد و مرکز دایره‌ای است که از هر سه رأس آن می‌گذرد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر است و اگر یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث واقع است.

۳ سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. نقطهٔ همرسی سه ارتفاع می‌تواند درون، روی یک رأس یا بیرون مثلث باشد. اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، این نقطه درون مثلث واقع است و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه منطبق بر رأس زاویهٔ قائمه است و اگر دارای یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

۴ سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. این نقطه همیشه درون مثلث واقع است و مرکز ثقل مثلث (گرانیگاه) نامیده می‌شود. با رسم سه میانهٔ هر مثلث، آن مثلث به شش مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌شود.

منطق ریاضی

گزارهٔ ساده: هر جملهٔ خبری را یک گزاره می‌نامند؛ به عنوان مثال «علی بزرگ‌تر از محمد است.» حاوی یک خبر است، پس یک گزاره است. اما عبارتی مانند «چه هوای سردی!» حاوی خبر نیست، بلکه جمله‌ای تعجبی است، پس گزاره نیست. یا عبارت‌هایی مانند «به مدرسه می‌روی؟» یا «برو کتابم را بیار!» جمله‌های خبری نیستند (اولی سؤالی و دومی امری است).

ارزش گزاره: هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد، گزاره‌ای که درست باشد را با T و گزاره‌ای که نادرست باشد را با F نمایش می‌دهیم. اگر گزاره‌ای مانند P درست باشد، آن را با نماد $P \equiv T$ و اگر نادرست باشد، آن را با نماد $P \equiv F$ نمایش می‌دهیم.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت روبه‌رو می‌خوانیم: چنین نیست که p

ارزش نقیض هر گزاره، عکس ارزش گزارهٔ اصلی است.

جدول ارزشی مقابل را ملاحظه کنید.

p	~ p
T	F
F	T

برهان خلف (برهان غیرمستقیم): برای اثبات یک حکم به برهان خلف، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف).

۲ نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته‌شده یا فرض اولیه در تناقض است (رسیدن به تناقض).

۳ با نادرست‌بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم موردنظر درست است.

مثال: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، اگر $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A}'$، آن‌گاه ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

پاسخ: می‌خواهیم ثابت کنیم $BC \neq B'C'$. با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد (فرض خلف)، در این صورت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هر سه ضلعشان برابر است، پس همنهشت هستند و در نتیجه باید اجزای متناظر آن‌ها برابر باشند، از جمله باید $\hat{A} = \hat{A}'$ باشد که خلاف فرض است و در نتیجه فرض خلف باطل است و در نتیجه $BC \neq B'C'$.

عکس یک قضیه: اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای را که حاصل می‌شود، عکس قضیه می‌نامند. عکس قضیه می‌تواند گزاره‌ای درست یا نادرست باشد.

چنان‌چه عکس قضیه‌ای درست باشد، آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامند.

مثال: قضیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

«اگر دو زاویه قائمه باشند، آن‌گاه آن دو زاویه برابرند.» عکس این قضیه را بیان کنید. آیا عکس این قضیه درست است؟ چرا؟

پاسخ: فرض این قضیه، قائمه‌بودن دو زاویه و حکم آن، برابری دو زاویه است، پس برای بیان عکس قضیه باید جای فرض و حکم را عوض کنیم، بنابراین عکس این قضیه به صورت زیر است:

«اگر دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه آن دو زاویه قائمه هستند.»

به روشنی معلوم می‌شود که این حکم درست نیست، زیرا اگر دو زاویه ۳۸ درجه باشند، هر چند برابرند ولی مطمئناً قائمه نیستند.

نامساوی در مثلث

۱ زاویهٔ خارجی مثلث، از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاور به آن بزرگ‌تر است.

۲ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

۳ اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر است.

۴ اندازهٔ هر ضلع مثلث، از مجموع دو ضلع دیگر آن کوچک‌تر است. (قضیهٔ حمار)

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گویند.

برای ردکردن یک حکم، کافی است مثالی ارائه دهیم که نشان دهد آن حکم درست نیست، ولی برای اثبات یک حکم کلی، یک یا حتی بی‌شمار مثال نیز کفایت نمی‌کند.

مثال: حکم «مربع عددهای حقیقی، همیشه عددی مثبت است.» را در نظر بگیرید. با ارائهٔ مثالی نقض، نشان دهید این حکم درست نیست.

پاسخ: عدد صفر یک مثال نقض برای این حکم است، زیرا $0^2 = 0 \not> 0$.

فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

تعریف نسبت: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $b \neq 0$، آن‌گاه کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت بین a و b می‌نامند.

تعریف تناسب: اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند، گوییم این دو کسر متناسب‌اند و با نماد $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نمایش می‌دهیم.

ویژگی‌های تناسب: در زیر، چند ویژگی از تناسب ارائه شده است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} & \text{ویژگی تعویض جای وسطین} \\ 2)\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c} & \text{ویژگی معکوس تناسب} \\ 3)\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} & \text{ویژگی ترکیب (تفضیل) در صورت} \\ 4)\ \frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c} & \text{ویژگی ترکیب (تفضیل) در مخرج} \end{cases}$$

یک ویژگی بسیار مهم دیگر در تناسب به صورت زیر است:

اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$ که در آن b_iها همگی ناصفرند، آن‌گاه $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=k$

که در آن باید $b_1+b_2+\cdots+b_n \neq 0$ باشد.

به عنوان مثال اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$.

واسطهٔ هندسی: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، b را واسطهٔ هندسی بین a و c نامند و داریم $b^2=ac$.

مثال: اگر $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$، به کمک ویژگی‌های تناسب، مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست‌اند. نام ویژگی را ذکر کنید:

الف) $y=3x$ ب) $\frac{x+y}{y}=\frac{4}{3}$

پ) $\frac{y-x}{y}=\frac{2}{3}$ ت) $\frac{x+1}{y+3}=\frac{1}{3}$

ث) $\frac{x-1}{y-3}=\frac{1}{3}$ ج) $3x=\frac{1}{y}$

پاسخ:

الف) درست است. (ویژگی طرفین‌وسطین)

ب) درست است. (ویژگی ترکیب در صورت)

پ) درست است. (ویژگی تفضیل در صورت)

ت) درست است. (ویژگی مهم)

ث) درست است. (ویژگی مهم)

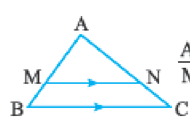
ج) نادرست است، زیرا از آن نتیجه می‌شود $3xy=1$، نه $3x=y$.

مثال: واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۱۲ و ۳ سانتی‌متر، چه‌قدر است؟

پاسخ: اگر واسطهٔ هندسی بین ۱۲ و ۳ را x بگیریم، آن‌گاه $x^2=12\times 3=36$ و در نتیجه $x=\pm 6$. توجه داشته باشیم که طول پاره‌خط نمی‌تواند منفی باشد، پس $x=6\ cm$.

قضیهٔ تالس و نتایج آن

قضیهٔ تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یکی از این دو ضلع پدید می‌آورد برابر است با نسبت پاره‌خط‌های نظیری که روی ضلع دیگر پدید می‌آورد.

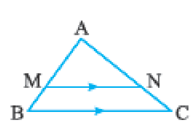


به بیان دیگر، اگر در شکل مقابل، $MN \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.

نتایجی از قضیهٔ تالس

در قضیهٔ تالس، نسبت دو جزء را نظیر هم قرار دادیم، شاید لازم باشد نسبت جزء به کل یا کل به جزء را بین پاره‌خط‌ها بنویسیم. اگر در قضیهٔ تالس، ترکیب در صورت یا ترکیب در مخرج کنیم، این روابط به دست می‌آیند. در ادامه، این نتایج بیان شده‌اند:

اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ تالس و ویژگی‌های تناسب، خواهیم داشت:



1) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ 2) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$

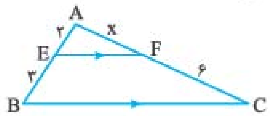
3) $\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NC}$ 4) $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{NC}=\frac{AM}{AN}$

تعمیم قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه خواهیم داشت $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$،

این رابطه به رابطهٔ **جزء به کل** مشهور است.

مثال: در شکل زیر، با فرض $EF \parallel BC$، مقدار x چه‌قدر است؟

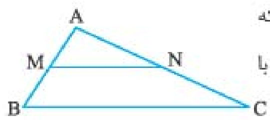


پاسخ: چون $EF \parallel BC$، با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{x}{6} \Rightarrow x=4$$

عکس قضیهٔ تالس

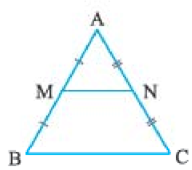
اگر در مثلث ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، آن‌گاه نتیجه می‌شود پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است. به بیان دیگر:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

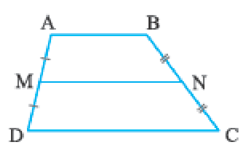
حالت خاصی از قضیهٔ تالس

پاره‌خط میانگین مثلث: پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین مثلث نامیده می‌شود که موازی ضلع سوم و مساوی نصف ضلع سوم مثلث است.



$$MN \parallel BC \quad , \quad MN=\frac{BC}{2}$$

پاره‌خط میانگین ذوزنقه: پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین ذوزنقه نامیده می‌شود که موازی قاعده‌های آن و مساوی میانگین اندازه‌های قاعده‌های آن است.



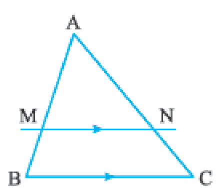
$$MN \parallel AB \parallel DC \quad , \quad MN=\frac{AB+DC}{2}$$

تشابه

تعریف دو چندضلعی متشابه: دو چندضلعی را متشابه نامند هرگاه زاویه‌های نظیر در آن دو چندضلعی، برابر و ضلع‌های نظیر، متناسب باشند. در حالتی خاص، دو مثلث نیز وقتی متشابه‌اند که زاویه‌های نظیر در آن دو مثلث، برابر و ضلع‌های نظیر، متناسب باشند.

قضیهٔ اساسی تشابه در مثلث

اگر خط راستی موازی یک ضلع مثلث رسم شود تا دو ضلع دیگر (یا امتداد آن دو ضلع) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است پس در شکل مقابل $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN}$.



حالت‌های سه‌گانهٔ تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت زیر با هم متشابه‌اند:

1. اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (زز)
2. اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این دو زاویه در دو مثلث متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (ض‌زض)
3. هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. (ض‌ض‌ض)